的なゆらぎからつくられる平均がゼロでない項がカイラル・アノーマリーの起源である。そして，Ward-高橋の恒等式は，擬スカラー密度の t →∞での定常性の反映として得られる。

なお，正規化は（3 c）を次のように書き，文献 3）と同様の計算をすることによって行なえる。

$$\langle d\,\theta^{\alpha}(x,\,t)\,d\,\overline{\theta}^{\beta}(y,\,t)\rangle = \lim_{M\to\infty} 2\hbar\,dt\sum_{n}\phi_{n}^{*\beta}(y)\,\exp[-(\lambda_{n}/M)^{2}]\,\phi_{n}^{\alpha}(x). \tag{9}$$

ここで，λ_n と ϕ_n はそれぞれ $\not{D}$ の固有値と固有関数である。

最後に，上記のカイラル・アノーマリーの導出とカイラル変換の関係に触れておく。上では(6)式を天下り的に与えたが，これは乱雑化された作用 S(t) にカイラル変換を施し，古典論のネーターの定理の導出と同様の計算を行なうと自動的に出現する。同じことを位相変換について行なえばベクトル・カレントの保存則が得られる。

参考文献

1) M. Namiki, I. Ohba, S. Tanaka and D. Yanga, Preprint WU-HEP-87-7.

2) Fukai et al., Prog. Theor. Phys. **69** (1983), 1600.

3) K. Fujikawa, Phys. Rev. **D21** (1980), 2848.

Adiabatic phase, Topological Action and Anomalous Commutators

立命館大・理工　倉　辻　比呂志

量子力学の断熱定理に於て見出された，幾何学的，トポロジー的位相因子（断熱位相或いは Berry phase とよばれる[1),2)]）が，最近原子物理から場の理論にいたる広い分野の問題に関連して興味をもたれてきている。量子力学を波動の力学とみる立場にたてば，この位相因子は変化し得る外場の中の粒子の運動に対して一般的に出現するもので，極めて自然なものと考えられる。それ程一般的なものでありながら，一部の人々を除いて[3)]見落されていたのは，いわば空気の如く遍在する故にかえって物理屋には気付きづらかったのかも知れない。以下に於て，断熱位相の説明を与えた後，筆者と飯田氏によって展開された動力学的理論と，その応用，とくに異常交換関係について述べる。

§ 1.　断熱位相

まず，断熱位相（以下 Γ と記す）について説明を与える。外場 $X(t)$（一般に多次元空間を形成する）中の〝粒子〟（その座標を q とする）に対する Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}=\hat{h}(X)\ \phi,\quad \phi=\phi(q,X) \tag{1}$$

を考える。通常の断熱定理は，ルーズにいえば次のようになる（c. f. Messiah[4]）。量子数 n をもつ(1)の解は

$$\phi_n(t)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\lambda_n(X)\,dt\right]|n(X_t)> \tag{2}$$

で与えられる。ここで $|n(X_t)>$ は，時刻 t に於ける〝スナップ・ショット〟方程式；$\hat{h}(X)|n(X)>=\lambda_n(X)|n(X)>$ の量子数 n をもつ固有解で，$\lambda_n(X)$ は断熱エネルギー準位である。(2)は，ちょうど，古典的な Ehrenfest の断熱定理の拡張となっている。[5] つまり，断熱変化とは，パラメータXの変化に際して量子数 n が保存されていくような変形である。

さて，特に $X(t)$ がパラメータ空間中で，ループ C に沿って，断熱的に，元の値にもどる場合を想定する。このとき ϕ は一価であるから，単に

$$\phi_n(T)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^T\lambda_n(X_t)\,dt\right]|n(X_T)> \tag{3}$$

（T は周期で $T\approx\infty$）となるはずであるが，正確な表式は

$$\phi_n(T)=\exp\left[\,i\,\Gamma(C)\right]\times(3) \tag{4}$$

のように余分な位相因子 Γ がつくのである。Γ は

$$\Gamma_n(C)=\oint_C<n|i\,\partial/\partial X_k|n>dX_k \tag{5}$$

で与えられることが重要である。つまり，これは $X(t)$ の時間変化とは無関係に C の幾何学的構造だけによっていることを表わしている。微分幾何学的には，Γ は，パラメータ空間上の断熱レベルからなるベクトル・バンドルより構成される〝ホロノミー〟とみられる。[2] (5)の被積分関数は，接続を与えている。いいかえれば，断熱変形は〝ゲージ場〟$F_k=<n|i\,\partial/\partial X_k|n>$ を誘導すると解釈される。[6]

このように，Γ の表式自身にあまりにもあっけないものであるが，その意味するところは非常に深いものである。それは Longuet-Higgins・Stone 定理[7] にもとづく。この定理は次のように説明される：(5)式を面積分に書きなおすと

$$\Gamma_n(C)\ \iint_S\sum_m<n|i\,\partial\hat{h}/\partial X_i|m><m|\partial\hat{h}/\partial X_j|n> \\ \times(\lambda_n-\lambda_m)^{-2}\,dX_i\,dX_j \tag{6}$$

となる。この表式から，被積分関数は，パラメータ空間中で，$\lambda_n=\lambda_m$ のところ，つまり２つの断熱レベルが交叉する点（degenerate point）に於て特異点をもつことがわかる。すると，Γ は，この特異点を〝わき出し〟にもつベクトル場の flux とみられる（図１）。これが L－S 定理の内容である。ゲージとの類似を用いれば，交叉点に Dirac monopole が存在して，それのつくる磁場の flux が Γ になること

がわかる。*)

さて，以上の話では，$X(t)$ の時間変化は，外から与えられたものとしていた。しかし，量子力学のたいていの問題では，我々は相互作用をする系を扱う。この場合には外場自身も力学系と考えなければならない。相互作用する２つの系（内部系と外部系とよぼう）に断熱定理を適用した場合，両者の結合から生ずる位相Γは，外部系の状態にダイナミカルにはね返ってくることになる。このはね返りを定式化するとどうなるか。次にそれについて考察する。

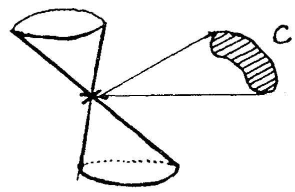

Fig. 1

§ 2　経路積分による有効作用[8), 9)]

２つの相互作用する系の量子力学的時間発展を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hat{H}_0(P,\ X) + \hat{h}(q,\ X) \tag{7}$$

で与えられ，**) $\hat{H}_0$ は外部系のハミルトニアンで $\hat{h}$ は内部系のそれで，外部系との相互作用をふくむ（簡単のため座標Xによるが，運動量Pにはよらないとする）。次のトレース関数を考える（トレースをとることは束縛状態を考えているわけである）：

$$\begin{aligned} K(T) &= \mathrm{Tr}\,[\exp(-i\hat{H}T/\hbar)] \\ &= \sum_n \int \langle n,\ X_0 | \exp(-i\hat{H}T/\hbar) | n,\ X_0 \rangle\, dX_0 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで $|n,\ X_0\rangle \equiv |n\rangle \otimes |X_0\rangle$ で，$|n\rangle$は勿論内部状態である。

TをN等分（$N \to \infty$）して，完全性関係：$\int |X\rangle\, dX \langle X| = 1$　を各時間分点でそう入することによって，経路積分表式を得る：

$$K(T) = \sum_n \int T_{nn}(C)\, \exp\,[\,i\,S_0(C)/\hbar\,]\, \Pi\, dX(t)\, dP(t) \tag{9}$$

ここで，$S_0 = \int_0^T (P\dot{X} - H_0)\, dt$，又，$T_{nn}(C)$ は $|n\rangle$から $|n\rangle$への internal な transition amplitude で，ループCに沿う time-ordered product

$$T_{nn}(C) = \langle n | T \exp\,[-\frac{i}{\hbar}\int_0^T \hat{h}(q,\ X_t)\, dt\,] | n \rangle \tag{10}$$

で与えられる。外部変数Xの変化がゆっくりしている場合には，(10)のＴ積の中の中間状態のうち，はじめの量子数 nをもった状態間のせん移のみが効いてくるから，

---

*)　２×２の標準モデル；$\hat{h} = \sum_{k=1}^{3} X_k \hat{\sigma}_k$（$\hat{\sigma}_k$は Pauli スピン）では原点$X = 0$が交叉点となり，〝ゲージ場〟$F$は，Dirac poleによるものと完全に一致する。

**)　以下では，外部系は正準変数（X，P）で記述される系を考えるが，非正準系への拡張は容易である。[9)]

$$<n(X_k)|n(X_{k-1})> \simeq 1 - <n|\partial/\partial X_i|n> \dot{X}_i \varDelta t \tag{12}$$

となり，従って，ループCに沿った有限の接続は

$$\prod_{k=1}^{\infty} <n(X_k)|n(X_{k-1})> = \exp[\, i\Gamma_n(C)] \tag{13}$$

$$\Gamma_n(C) = \oint_C <n|i\,\partial/\partial X_i|n> dX_i \tag{14}$$

となって，Γは断熱相(5)と一致する。(13)を(9)に代入すると，$K(T)$は，結局，次のようになる：

$$K^{eff}(T) = \sum_n \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{eff}\right] \Pi\, dX(t)\, dP(t) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} S_{eff} &= S_{ad} + \hbar\Gamma_n(C) \\ S_{ad} &= \int_0^T (P\dot{X} - H_0 - \lambda_n(X))\, dt \end{aligned} \tag{16}$$

この表式からΓは外部力学系に対する作用関数の一部になっていることがわかる。これがΓのダイナミカルな意味である。ただし，有効作用S_{eff}は断熱レベルnの各々について定義されていることに注意しておこう。

ここで，上の formulation の直接的応用についてふれておく。

◎ Γの動力学的効果を直接的に検証するには，束縛スペクトルを調べればよい。そのためには，K^{eff}に準古典近似を行うのが手っとり早い（詳細は ref. 8)，9) 参照）結果は，次の準古典量子化則を得る。

$$\oint_C \sum_k P_k\, dX_k = \left(n + \frac{\alpha}{4} - \frac{\Gamma}{2\pi}\right) 2\pi\hbar$$

$n=$ integer。ここでCは$H_{ad}(P, X) = E$上の閉曲線である。上の公式より，Γは量子数nを変化させる役割をしていることがわかる。特別の場合として，〝分数量子化〟が得られる。これは Aharanov-Bohm 効果或いは Dirac pole 中の粒子の量子化と関係していて興味深い。

◎ 外部系として電磁場をとると，これは$A_0 = 0$のゲージのもとではハミルトン系となる。そこで，電磁場と結合する2次元電子系に上の formulation を適用することにより，Simon による量子ホール効果の説明の拡張を帰結する。[10)]

§3. シンプレクティック構造の変形と異常交換関係

トポロジカルな位相Γはその定義から，大域的な性質の量である。一方，作用関数(16)の形から推測されるように，これは，又，外部系に対する phase space の局所的構造も変化させる。この変化が異常交換関係を導くことを示そう。詳細は ref. 11) 参照。

ひとつの断熱準位nだけに注目して，それに対応するS_{eff}をとる。S_{eff}に付随する1次微分形式は

$$\omega = \sum_k P_k\, dX_k + \sum_k F_k\, dX_k \tag{17}$$

$$T_{nn}(C) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^T \lambda_n(X)\,dt\right] \prod_{k=1}^{\infty} \langle n(X_k)|n(X_{k-1})\rangle \tag{11}$$

が得られる。第2項の無限積はループ C 上の無限分点 $\{X_k\}$ の上にわたる。無限積の各項は，まさに，C 上の無限小はなれた2点間の接続をあたえている。つまり，速度 $\dot{X}$ の1次まで展開すると

で与えられる。外微分をとることにより，

$$\Omega = \sum_k \left(dP_k \wedge dX_k + \frac{\partial F_k}{\partial X_j}\, dX_k \wedge dX_j \right) \tag{18}$$

を得る。これは通常の（flat な）シンプレクティック形式 $\Omega_0\ (=\sum dP_k \wedge dX_k)$ を変形させたものである。シンプレクティック・テンソルを g^{ij} とかくと $g^{ij} = g^{(0)ij} + \hbar\,\Delta(X_i, X_j)$

$$g^{(0)ij} \equiv J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(X_i X_j) = i\,\{\langle n|\partial/\partial X_i \times \partial/\partial X_j|n\rangle - (i \leftrightarrow j)\} \tag{19}$$

で与えられる。Δ はゲージ場 F より誘導される曲率テンソルである。Ω に対応するP・Bは g^{ij} の逆テンソル g_{ij} を用いると

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \sum g_{ij} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} \qquad \xi_i = (X_i, P_i) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - (X \leftarrow P) \right) + \hbar \sum_{ij} \Delta(X_i, X_j) \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial P_j} \end{aligned} \tag{20}$$

となる。*) さてP・Bと交換子の対応 $[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar\{F, G\}$ に注意すれば，量子化が得られる。とくに，

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \quad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\,\delta_{ij} \\ &[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = i\hbar^2 \Delta(\hat{X}_i, \hat{X}_j) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

このうち最後のものが，異常交換関係を与える。

上で得た一般論を，外部系が非アーベル・ゲージ場の場合に適用してみよう。ゲージ場がカイラル・フェルミオンと結合する場合を考える。断熱準位として，Dirac vacuum をとればよい。$A_0 = 0$ ゲージをとれば，$A_i^a(x)$，$E_i^a(x)$ は正準共役となる。従って，(21)を適用すると，

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{A}(x), \hat{A}(y)] = 0, \quad [\hat{A}_i^a(x), \hat{E}_j^b(y)] = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta_{ab}\,\delta(x-y) \\ &[\hat{E}_i^a(x), \hat{E}_j^b(y)] = i\hbar^2 \Delta(\hat{A}_i^a(x), \hat{A}_j^b(y)) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

を得る。これをゲージ変換の generator

$$\hat{G}^a(x) = D_i^{ab} \cdot E_i^b(x)$$

*) これは一般には $\hbar$ の無限級数になるが，ここでの議論では $|n\rangle$ はXのみに依存しているから $\hbar$ の1次で切れる。

にあてはめると

$$[\hat{G}^a(x),\ \hat{G}^b(\mathrm{y})]_{\mathrm{anom}} \equiv [\hat{G}^a(x),\ \hat{G}^b(y)] - f_{abc}\hat{G}^c(x)\ \delta(x-y)$$
$$= i\hbar\, D_i^{ac}(x)\, D_j^{bd}(y)\, \Delta(\hat{A}_i^c(x),\ \hat{A}_j^d(y)) \tag{23}$$

となり，これは Faddeev の operator anomaly に一致することが示される。(ref.12) 参照)

断熱位相のアイデアを用いて Faddeev の異常交換を説明する別のアプローチがある。(ref.13)~16)) これらは，いずれも，ゲージ変換をもつフェルミオン・ヒルベルト空間で表現したとき，通常の射線表現から，位相Γによる，修正をこうむるという事実にもとづいている。ここで展開した手法との関連を調べることは残された問題である。

Acknowledgement

この研究に対して，多大の興味と，貴重な suggestion をいただきました北門新作氏に厚く御礼申し上げます。又，共同研究者の飯田晋司氏に感謝いたします。

References

1) M.V. Berry, Proc. R. Soc. **A392** (1984) 45.
2) B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2167.
3) H. C. Longuet-Higgins, Proc. R. Soc. **A344** (1975) 147; A. J. Stone, Proc. R. Soc. **A351** (1976) 147; C. A. Mead and D. G. Truhlar, J. Chem. Phys. **70** (1979) 2284.
4) A. Messiah, Quantum mechanics.
5) 朝永振一郎，量子力学 I
6) F. Wiliczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2111; C. A. Mead and D. G. Tunhlar, ref. 3) の論文
7) ref. 3) の論文
8) H. Kuratsuji and S. Iida, Phys. Lett. **111A** (1985) 220; Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 439.
9) H. Kuratsuji and S. Iida, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1003.
10) H. Kuratsuji, to appear in Phys. Lett. A; J. Avron and R. Seiler, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 259.
11) S. Iida and H. Kuratsuji, Phys. Lett. **184B** (1987) 242.
12) H. Kuratsuji and S. Iida, Ritsumeikan Univ. preprint.
13) P. Nelson and L. Alvarez-Gaumé, Comm. Math. Phys. **99** (1985) 103.
14) A. J. Niemi and G. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1019.
15) H. Sonoda, Nucl. Phys. **B266** (1986) 410.
16) H. Hosono, Nagoya Univ. preprint DPNU-86-44.